O JEDNEJ DÔKAZOVEJ ÚLOHE

Marián Trenkler, PF UPJŠ Košice

Úloha: Dokážte, že ak sa dve paraboly, ktorých osi sú navzájom kolmé, pretínajú v štyroch bodoch, tak tieto body ležia na kružnici.

Keď dostaneme za úlohu dokázať nejaké tvrdenie, väčšina z nás sa do riešenia nepúšťa, ak to nemusí byť, pretože úlohy tohto typu sú považované za ťažké. Že tomu tak často nie je, ukážeme na tejto dôkazovej úlohe z geometrie.

Pri dôkaze použijeme metódy analytickej geometrie. Najskôr si zvolíme súradnicový systém. Nech P a Q sú dve paraboly s navzájom kolmými osami. Ich osi zvolíme za súradné osi, pričom os prvej paraboly bude totožná s x-ovou osou. V takto zvolenej súradnicovej sústave budú mať paraboly P a Q nasledujúce rovnice:

$$P:\ y^2 = 2p(x-m)$$

$$Q:\ x^2 = 2q(y-n)$$

Keď obe rovnice sčítame, dostávame rovnicu

$$y^2+x^2 = 2p(x-m)+2q(y-n)$$

a úpravou rovnicu

$$x^2-2px+y^2-2qy = -2pm-2qn$$

$$(x-p)^2+(y-q)^2 = p^2+q^2-2pm-2qn \qquad (1)$$

Táto rovnica je rovnicou kružnice, bodu alebo žiaden bod tejto rovnici nevyhovuje podľa toho, či výraz na pravej strane je kladný, rovný nule alebo záporný.

Aj bez počítania však vieme, že keď existujú dva rôzne body, ktorých súradnice vyhovujú rovnici (1), potom táto je rovnicou kružnice. Pretože súradnice všetkých spoločných bodov parabol P a Q spĺňajú rovnicu (1), tieto ležia na jednej kružnici.